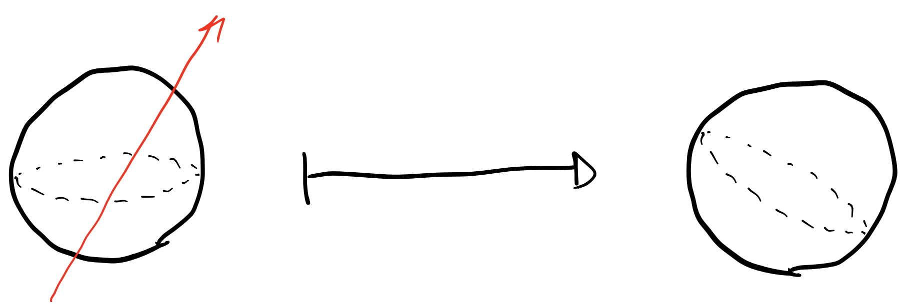
L'esperienza della meccanica quantistica mostra l'importanza di sapere classificare gli stati di un sistema in base a certi numeri quantici. Quali sono in generale questi numeri quantici? Come si determinano gli osservabili che commutano con l'Hamiltoniana? Quali regole di selezione seguono dalle proprietà di simmetria del sistema in esame?

Queste domande trovano risposta in modo sistematico nella "teoria dei gruppi".

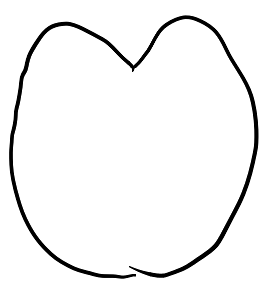
Il ruolo delle simmetrie nella descrizione di sistemi fisici è talmente preponderante che si può dire che certi sistemi sono capiti solo grazie a tali simmetrie.

La modellizzazione dei sistemi avviene spesso partendo da semplificazioni del sistema in esame, che godono di maggiori simmetrie, e via via vengono introdotte perturbazioni che non rispettano tali simmetrie.

P. es. una mela può essere vista in prima approx come una sfera, cioè un oggetto che resta identico a se stesso anche se lo ruoto di qualunque angolo attorno a qualunque asse di rotazione.

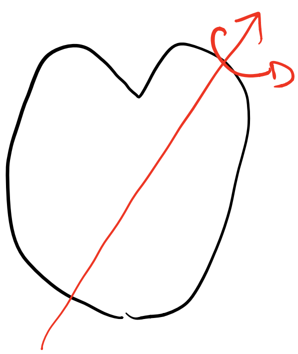


Una vera mela però è fatta in modo leggermente diverso

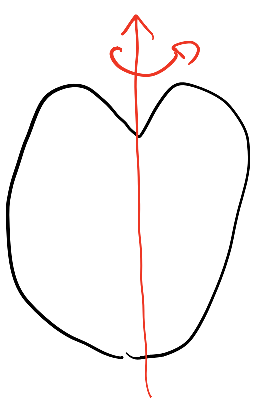


che è quasi un "solido di rotazione"

Dunque posso raffinare la mia descrizione della mela descrivendola come un oggetto che resta uguale a se stesso solo se ruotato attorno ad uno specifico asse



non è più una simmetria del sistema



è ancora una simmetria del sistema.

Le rotazioni nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono descritte da matrici 3×3 $\overbrace{\text{speciali}}^{\det=1}$ $\overbrace{\text{ortogonali}}^{M^{-1}=M^t}$ che si dice $SO(3)$

Vedremo che $SO(3)$ è equivalente a $SU(2)$, matrici 2×2 $\underbrace{\text{unitarie}}_{(U^t)^* = U^{-1}}$ $\underbrace{\text{speciali}}_{\det = 1}$.

Vedremo che $SU(2)$ è un elemento di base per la costruzione e la comprensione di simmetrie più complicate e talvolta meno intuitive delle simmetrie di rotazione cui siamo più familiari.

Le lezioni sono volte a fornire gli strumenti generali per comprendere e utilizzare simmetrie più generali di $SU(2)$.

ALCUNI RICHIAMI SU $SU(2)$

Una rotazione in $\mathbb{R}_3$ è descritta da una matrice 3×3

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si può applicare ad un generico vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

per trovare il vettore ruotato

$$x' = R_z(\phi)\, x = \begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 c_\phi - x_2 s_\phi \\ x_1 s_\phi + x_2 c_\phi \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Se $\phi \ll 1$ $\quad c_\phi \simeq 1 \quad s_\phi \simeq \phi$

$$R_z(\phi) \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 \\ \phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 - i\phi \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{T_z}$$

$$= \mathbb{1}_3 - i\phi T_z$$

Similmente si possono trovare matrici che generano le rotazioni attorno a $\hat{x}$ e $\hat{y}$

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste matrici riproducono l'effetto di rotazioni piccole e si compongono a formare rotazioni grandi

$$e^{-i\phi T_z} = \begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in generale una rotazione può essere espressa come una composizione di rotazioni $\quad R = R_z(\phi)\,R_x(\vartheta) = e^{-i\phi T_z}\, e^{-i\vartheta T_x} =$

$$= e^{-i(\phi,\vartheta).(T_z,T_x)}$$

$$= e^{-i\bar{\alpha}.\bar{T}}$$

$$\bar{\alpha}.\bar{T} = \alpha_1 T_1 + \ldots + \alpha_n T_n = \alpha_x T_x + \alpha_y T_y + \alpha_z T_z$$

Come sapete, la composizione di due rotazioni è anch'essa una rotazione. Vale a dire che

$e^{-i\bar{\alpha}.\vec{T}} \cdot e^{-i\bar{\beta}\vec{T}}$ definisce una rotazione γ tale che $\quad e^{-i\gamma T} = e^{-i\alpha T}\, e^{-i\beta T}$

$$\exp(-i\alpha T)\cdot\exp(-i\beta T) =$$

$$= \left[1 - i\alpha T - \frac{1}{2}(\alpha\cdot T)^2 \dots\right]\left[1 - i\beta T - \frac{1}{2}(\beta\cdot T)^2 + \dots\right] =$$

$$= 1 - i(\alpha+\beta)T - \frac{1}{2}\underbrace{\big((\alpha+\beta)\,T\big)^2}_{} \overbrace{- \frac{1}{2}(\alpha\cdot T)(\beta T) + \frac{1}{2}(\beta T)(\alpha T)}^{\frac{1}{2}[\beta T,\ \alpha T] = -\frac{1}{2}[\alpha T, \beta T]} -$$

$$\big((\alpha+\beta)T\big)\big((\alpha+\beta)T\big)$$

$$(\alpha T + \beta T)(\alpha T + \beta T)$$

$$(\alpha T)^2 + (\alpha T)(\beta T) + (\beta T)(\alpha T) + (\beta T)^2$$

$$= 1 - i(\alpha+\beta)T - \frac{1}{2}\big((\alpha+\beta)T\big)^2 - \frac{1}{2}[\alpha T, \beta T]$$

$$= \exp\left\{-i(\alpha+\beta)T - \frac{1}{2}[\alpha\cdot T, \beta\cdot T]\right\}$$

La composizione di due rotazioni di parametri α e β è "quasi" la rotazione di parametri $\alpha+\beta$. C'è una parte in più legata al commutatore tra le due rotazioni. Questo esempio rende evidente come nel definire un $\gamma = a \oplus b$ si deve conoscere la struttura di commutazione delle operazioni.

Le relazioni di commutazione sono una encodazione delle proprietà delle rotazioni

$$\left.\begin{array}{l} [T_x, T_y] = i T_z \\ [T_y, T_z] = i T_x \\ [T_z, T_x] = i T_y \end{array}\right\} \Rightarrow [T_i, T_j] = i T_k$$

Astrattamente si parla di Algebra di Lie come un insieme di elementi, p.es. T_x, T_y, T_z, e una operazione chiamata prodotto di Lie indicato da $[\ ,\ ]$ per cui valgono certe regole di commutazione.

È una astrazione delle proprietà di matrici $T_{x,y,z}$ ma potrebbe essere valida per altro tipo di oggetti, che non sono matrici o non sono le 3×3 che abbiamo scritto (p.es. sono le 2×2 di Pauli!) quindi si preferisce volere ALGEBRA come UNO SPAZIO VETTORIALE, L, assieme ad un BILINEARE $[\,,\,]$ DA $L \times L \to L$ (cioè una mappa che prende due elementi in L e vi associa un altro elemento in L) che soddisfa le seguenti proprietà per $x, y \in L$ e $a \in \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$

- $[ax, y] = a[x, y]$
- $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$
- $[x, y] = -[y, x]$

JACOBI ID. • $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Si parla di rappresentazione dell'algebra come un insieme di operazioni, p.es. matrici su uno spazio vettoriale, che soddisfano le stesse relazioni di commutazione. $T_{x,y,z}$ sono una rappresent. matricale 3×3 sui reali

---

Si può facilmente definire una algebra fatta con

$$t_\pm = t_x \pm i\, t_y \quad e \quad t_z$$

con commutatori

$$[t_z, t_+] = [t_z, t_x] + i[t_z, t_y] = i t_y - i^2 t_x$$
$$= t_x + i\, t_y = t_+$$

$$[t_z, t_-] = -\, t_-$$

$$[t_+, t_-] = 2 t_z$$

Questa algebra è equivalente alla precedente, può però risultare più comoda. In particolare se immaginiamo di usare una rapp.

della seconda algebra con $t_\pm$ su uno spazio di vettori possiamo costruirci lo spazio in modo esplicito

$$t_{+,-,z} \longrightarrow T_{+,-,z} \text{ su } V$$

Prendiamo un particolare $v_j \in V$ t.c.

$$\begin{cases} T_z v_j = j v_j & (\text{autovettore di } T_z) \\ T_+ v_j = 0 & (\text{annichila } T_+) \end{cases}$$

(INTUIZIONE: sto partendo da un oggetto che nel linguaggio del momento angolare ha il massimo momento angolare...)

$$T_z [T_- v_j] =$$

$$= \{T_- T_z - \underbrace{[T_-, T_z]}_{T_-}\} v_j$$

$$= (j-1) T_- v_j$$

ciò è un autovettore di T_z con autovalore $j-1$ definito dall'azione di T_-

Posso dunque chiamare $T_- v_j = v_{j-1}$ e da lì posso ottenere tutti gli v_{j-k} applicando ripetutamente T_-

A questo punto ho preso un vettore particolare in V e ho specificato come vi agiscono tutti gli elementi della rapp. T_z, T_-, T_+

$$v_{k-1} \equiv T_- v_k$$

Lo spazio su cui operano i T_i è finito dimensionale quindi ci sarà un massimo numero di volte che posso applicare T_-

$$(T_-)^k v_j = 0 \qquad \forall k \geq q$$

ovvero

$$T_- v_q = 0$$

Per trovare q faccio le seguenti operazioni:

OSSERVAZIONE #1

$$T_z\left[T_+ v_k\right] = (k+1)\left[T_+ v_k\right]$$

$$\Big\{ T_+ T_z - \underbrace{\left[T_+, T_z\right]}_{-T_+} \Big\} v_k = (k+1)\left[T_+ v_k\right]$$

$\Rightarrow$ segue che $T_+ v_k$ è proporzionale a v_{k+1}

$$T_+ v_k \propto v_{k+1}$$

cioè $\exists$ un τ_k t.c.

$$T_+ v_k = \tau_k v_{k+1}$$

τ_k può essere calcolato ricordando che $v_k = T_- v_{k+1}$ e le regole di commutazione

$$\tau_k v_{k+1} = T_+ v_k = T_+ T_- v_{k+1} = \Big(T_- T_+ + \overbrace{\left[T_+, T_-\right]}^{2T_z}\Big) v_{k+1}$$

$$= \tau_{k+1} v_k + 2(k+1) v_k$$

$$\tau_k v_{k+1} = \left[\tau_{k+1} + 2(k+1)\right] v_k$$

questa relazione di ricorrenza si può risolvere con condizione al contorno $\tau_j = 0$ (dove j è quel j massimo introdotto prima)

In conclusione osserviamo che $T_+ v_k = \tau_k v_{k+1}$

con $\tau_k = j(j+1) - k(k+1)$

q è definito da $T_+ T_- v_q = 0$ cioè dal fatto che v_q annichila T_-

$$T_+ T_- v_q = \{ T_- T_+ + \overbrace{[T_+, T_-]}^{2T_z} \} v_q$$

$$= \{ j(j+1) - q(q+1) + 2q \} v_q$$

$$\begin{cases} q = j+1 \\ q = -j \end{cases}$$

$q = j+1$ non è accettabile perché cerchiamo $q \leq j$

In questo caso abbiamo ritrovato l'insieme $m = -j \dots j$ del momento angolare!

In analogia possiamo definire $T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2$

$$T^2 v_k = \left\{ T_z^2 + \frac{1}{2}\left(T_+ T_- + T_- T_+\right) \right\} v_k$$

$$= \left\{ k^2 + \frac{1}{2}\left(\tau_{k-1} + \tau_k\right) \right\} v_k$$

$$= j(j+1)\, v_k$$

T^2 è detto operatore di Casimir. Ha la proprietà di "essere costante", cioè avere lo stesso autovalore su tutti gli stati generati da v_j tramite i $T_\pm$.

I generatori $T_{z,\pm}$ mappano lo spazio dei $v_{k=-j \dots j}$ in se stesso. I vettori generati da v_j sono $2j+1$ e si dicono appartenere a una

rappresentazione irriducibile con $\dim = 2j+1$

Un esempio di riducibile è il doppio prodotto di irreps

$j_1 \otimes j_2 = \sum_i$ irreps dove ciascuna irreps ha un valore diverso dalle altre per l'operatore di Casimir